Eine Einführung in die multiplikativen und runden Formen

Seminar über quadratische Formen,
Vortrag vom 22.05.2001

Klaas-Tido Rühl

07.06.2001

In diesem Vortrag geht es, wie der Title schon deutlich macht, vor allen Dingen um mulitplikative und runde Formen. Die multiplikativen Formen wurden zuerst von Albrecht Pfister definiert. Dieser verwendete sie für seine Doktorarbeit, um den Wittring genauer zu untersuchen, und die quadratischen Formen darin zu klassifizieren. Er legte schließlich die Arbeit Witt vor. Dieser las sie und definierte daraufhin die runden Formen, mit denen er die bereits von Pfister geführten Beweise wesentlich schneller führen konnte.

1 Vorbereitende Definitionen und Sätze

Zunächst führe ich ein paar Sätze ein, die ich für einige der noch folgende Beweise benötige. Allerdings kann ich die Beweise hier nocht führen, da dafür wiederum weitere Sätze benötigt würden, die aber eigentlich nicht besonders relevant für diesen Vortrag sind.

Zum Nachlesen findet man die Beweise und auch eine Einführung in die quadratischen Formen in „Quadratic Forms with Applications to Algebraic Geometry and Topology“ von Albrecht Pfister, Cambridge University Press. Außerdem führe ich noch Definitionen und Sätze an, die auch in „Quadratische Formen über Körpern“ von F. Lorenz, Springer Verlag, zu finden sind.

Sollte ich im folgenden Vortrag den Buchstaben K verwenden, so meine ich damit immer einen Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

Satz 1.1. *(Substitutionsprinzip, Pfister, Seite 10, Proposition 3.1)*
φ sei eine n-dimensionale quadratische Form über K, p sei ein Polynom mit $0 \neq p = p(t_1, \ldots, t_m) \in K[t_1, \ldots, t_m]$ und $c_1, \ldots, c_m$ seinen beliebige Elemente aus K. Wird p von φ über dem Körper der rationalen Funktionen $K(t_1, \ldots, t_m)$ repräsentiert, so auch jedes Element $p(c_1, \ldots, c_m)$ über K.

Satz 1.2. *(Pfister, Seite 11, Theorem 3.4)*
Seien $\varphi = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ und $\psi = \langle b_1, \ldots, b_m \rangle$ reguläre quadratische Formen über K. Dann sind die folgenden Aussagen für den Fall $m \leq n$ äquivalent:

(1) ψ ist äquivalent zu einer Teilform von φ, das heißt:

$$\varphi \cong \psi \oplus \chi$$

mit einer geeigneten quadratischen Form χ über K. (Möglicherweise ist $\chi = 0$ die leere Form der Dimension 0.)

(2) Für jede Körpererweiterung $L \supseteq K$ gilt: $D_L(\psi) \subseteq D_L(\varphi)$, wobei

$$D_L(\varphi) = \{\varphi(v) \mid 0 \neq v \in L^n\}.$$

(3) φ repräsentiert den generischen Wert von ψ, das heißt φ repräsentiert

$$\psi(t_1, \dots, t_m) = b_1 t_1^2 + \dots + b_m t_m^2$$

über dem Körper $K(t_1, \dots, t_m)$ der rationalen Funktionen.

Lemma 1.3. *(Pfister, Seite 6, Lemma 2.1)*
φ sei eine anisotrope quadratische Form über K. Dann ist $\varphi_{K(x)}$ auch anisotrop über dem rationalen Funktionenkörper $K(x)$.

Nun führe ich noch die Determinante einer quadratischen Form ein. Diese ähnelt sehr der Determinante für normale Matrizen, nur das hier der Wert der Determinante in der Quadratklassengruppe K^*/K^{*2} betrachtet wird. Dies ist durchaus sinnvoll wenn man weiß, daß äquivalente Matrizen in K^*/K^{*2} dieselbe Determinante haben.

Definition 1.4. *Für eine quadratische Form $\varphi \cong \langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$, $a_i \in K^*$, $i = 1 \dots m$, ist $det(\varphi) = \left(\prod_{i=1}^{m} a_i \right) \in K^*/K^{*2}$ die Determinante von φ.*

Für einen Beweis im dritten Teil dieses Vortrags, benötige ich nun noch das folgende, kurze Lemma.

Lemma 1.5. *(Pfister, Seite 21, Lemma 1.3)*
Es gilt:

$$\langle a, b \rangle \text{ repräsentiert } c \in K^* \implies \langle a, b \rangle \cong \langle c, abc \rangle.$$

Beweis. Da $\langle a, b \rangle$ c repräsentiert, gibt es ein $e \in K^*$ so, dass gilt:

$$\langle a, b \rangle \cong \langle c, e \rangle.$$

Zwei quadratische Formen sind aber genau dann äquivalent, wenn sie in K^*/K^{*2} dieselbe Determinante haben. Also:

$$det(\langle a, b \rangle) = det(\langle c, e \rangle) \text{ in } K^*/K^{*2}.$$

Nach Definition der Determinante (siehe Definition 1.4) gilt nun:

$$ab = ce \text{ in } K^*/K^{*2}$$

Durch Multiplikation mit c erhalte ich:

$$abc = c^2 e = e \text{ in } K^*/K^{*2}$$

Somit wäre das Lemma bewiesen, da nun gilt:

$$\langle c, e \rangle \cong \langle c, abc \rangle \text{ und somit } \langle a, b \rangle \cong \langle c, abc \rangle.$$

□

2 Multiplikative Formen

Von nun an seien K ein Körper mit $char(K) \neq 2$, $x^t = (x_1, \dots, x_n)$ und $y^t = (y_1, \dots, y_n)$ Vektoren aus n Unbestimmten, $K(x) = K(x_1, \dots, x_n)$ und $K(x, y) = K(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$.

Definition 2.1. *(Pfister, Seite 25, Definition 2.1)*
Sei φ eine reguläre quadratische Form und $\dim(\varphi) = n$*.*

(1) φ heißt multiplikativ, wenn es ein $z^t = (z_1, \dots, z_2)$ mit $z_i \in K(x, y)$, $i = 1 \dots n$, gibt so, dass gilt:

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(z) \tag{2.1}$$

(2) φ heißt streng multiplikativ, wenn z so ausgewählt werden kann, dass z linear von y abhängt, wenn es also eine reguläre Matrix $T_x \in M_{n\times n}(K(x))$ gibt so, dass (2.1) gilt mit $z = T_x y$, also:

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(T_x y)$$

Statt T_x kann ich auch T_y betrachten. Und nach der Definition der Äquivalenz zweier quadratischer Formen, kann ich auch schreiben

$$\varphi(x)\varphi \cong \varphi \text{ über } K(x) \tag{2.2}$$

Sei nun A die zu φ gehörige symmetrische Matrix. Da $\varphi(T_x y) = y^t T_x^t A T_x y$ ist, kann ich (2.2) auch schreiben als

$$\varphi(x)A = T_x^t A T_x \text{ in } M_{n\times n}(K(x)) \tag{2.3}$$

Aus der Definition ersieht man sofort, dass multiplikativen Formen $\varphi(x)\varphi(y)$ über $K(x, y)$ repräsentieren. Streng multiplikative Formen haben sogar $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ als Ähnlichkeitsfaktoren, wobei die Ähnlichkeitsfaktoren folgendermaßen definiert sind:

Definition 2.2. *Sei φ eine reguläre quadratische Form über K. $a \in K$ heißt Ähnlichkeitsfaktor, wenn $a\varphi \sim \varphi$ gilt, wenn also $a\varphi$ ähnlich zu φ ist im Wittring $W(K)$.*

Die Menge der Ähnlichkeitsfaktoren $G_K(\varphi)$ von φ is definiert als

$$G_K(\varphi) = \{a \in K \mid a\varphi \sim \varphi\}.$$

Das $\varphi(x)\varphi(y)$ von φ über $K(x, y)$ repräsentiert wird, deutet schon an, woher die multiplikativen Formen ihren Namen haben. Folgendes Lemma wird aber noch eine wesentlich bedeutendere Erklärung liefern. Multiplikative Formen sind insofern interessant, als dass die Menge der von ihnen repräsentierten Elemente, über jedem Erweiterungskörper von K eine Gruppe bilden.

Lemma 2.3. *(Pfister, Seite 28, Lemma 3.1)*
Sei φ eine quadratische Form über K. φ ist genau dann multplikativ, wenn $D_L^*(\varphi)$ für jeden Erweiterungskörper $L \supseteq K$ eine Untergruppe von L^* ist.

Beweis. **„ $\Longrightarrow$ “:** φ sei multiplikativ. Es gilt also per Definition:

$$\varphi \text{ repräsentiert } \varphi(x)\varphi(y) \text{ über } K(x,y).$$

Und da $K(x,y)$ für jeden Erweiterungskörper $L \supseteq K$ in $L(x,y)$ enthalten ist, gilt:

$$\varphi \text{ repräsentiert } \varphi(x)\varphi(y) \text{ über } L(x,y) \quad \forall L \supseteq K.$$

Da quadratische Formen aufgrund ihrer Definition keine gebrochen rationalen Funktionen repräsentieren, gilt: $\varphi(x)\varphi(y) \in L[x,y]$. Außerdem wird $\varphi(x)\varphi(y)$ auch noch von φ über $L(x,y)$ repräsentiert. Also ist Satz 1.1 anwendbar und es gilt über L:

$$\varphi(u)\varphi(v) \in D_L(\varphi) \quad \forall\, u,v \in L^n,\; n = \dim(\varphi). \tag{2.4}$$

Seien nun $a = \varphi(u)$ und $b = \varphi(v)$ beliebige Elemente aus $D_L^*(\varphi)$. Nach (2.4) gilt nun:

$$ab = \varphi(u)\varphi(v) \in D_L^*(\varphi)$$

$D_L^*(\varphi)$ repräsentiert also alle endlichen Produkte von Elementen aus $D_L^*(\varphi)$. Betrachte nun dazu $\varphi(\frac{u}{a}) \in D_L^*(\varphi)$. Da a ein Skalar ist gilt:

$$\varphi(\frac{u}{a}) = a\frac{1}{a^2} = \frac{1}{a} = a^{-1} \in D_L^*(\varphi)$$

Also enthält $D_L^*(\varphi)$ auch das Inverse zu jedem seiner Elemente. Es bleibt also noch zu zeigen, dass $D_L^*(\varphi)$ auch die Eins enthält. Dies folgt aber direkt daraus, dass zu $a \in D_L^*(\varphi)$ auch ein $a^{-1} \in D_L^*(\varphi)$ existiert, weshalb gilt:

$$aa^{-1} = 1 \in D_L^*(\varphi).$$

$D_L^*(\varphi)$ erfüllt also alle drei Gruppenaxiome und ist somit eine Gruppe.

„ $\Longleftarrow$ “: Sei nun $D_L^*(\varphi)$ für jeden Erweiterungskörper $L \supseteq K$ eine Gruppe. Mit $L = K(x,y)$ folgt also, dass $D_{K(x,y)}^*(\varphi)$ eine Untergruppe von $(K(x,y))^*$ ist. Da $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ offensichtlich Elemente aus $D_{K(x,y)}^*(\varphi)$ sind, folgt aus der Voraussetzung:

$$\varphi(x)\varphi(y) \in D_{K(x,y)}^*(\varphi)$$

Also ist φ nach Definition 2.1 multiplikativ. □

3 Pfisterformen

Zwischen multiplikativen und Pfisterformen besteht ein enger Zusammenhang. Die Pfisterformen spielen zum Beispiel eine wichtige Rolle bei der Klassifikation der multiplikativen Formen. Eine kurze Klassifikation soll auch noch in diesem Abschnitt versucht werden, bevor dann im nächsten Abschnitt die runden Formen eingeführt werden, für deren Klassifikation die Pfisterformen ebenfalls eine wichtige Rolle spielen, weshalb ihnen hier ein ganzer Abschnitt gewidmet wird.

Definition 3.1. *Seien K ein Körper, $k \in \mathbb{N}$, $n = 2^k$ und $a = (a_1, \ldots, a_k) \in K^k$. Eine quadratische Form der Gestalt*

$$\varphi = \bigotimes_{i=1}^{k} \langle 1, a_i \rangle$$

heißt n-fache Pfisterform und es gilt: $\dim(\varphi) = n = 2^k$. *Von nun an kürze ich folgendermaßen ab, falls es sich bei* φ *um eine Pfisterform handelt:*

$$\varphi = \langle\langle a_1, \ldots, a_k \rangle\rangle.$$

Satz 3.2. *(Pfister, Seite 25, Theorem 2.2)*
φ *sei eine quadratische Form. Es gilt:*

$$\begin{array}{ll} & \varphi \textit{ ist streng multiplikativ.} \\ \Longrightarrow & \varphi \otimes \langle 1, a \rangle \textit{ ist für jedes } a \in K^* \textit{ streng multiplikativ.} \end{array}$$

Speziell gilt, dass alle Pfisterformen streng multiplikativ sind.

Beweis. durch Induktion nach k:
Den Induktionsanfang benötige ich nur, um zu beweisen, dass speziell Pfisterformen steng multiplikativ sind.

k = 0: Für $k = 0$ gibt es nur die Pfisterform $\varphi = \langle 1 \rangle$. Betrachte dazu die Matrix $T_x = 1 \in M_{1\times 1}(K)$ und die zu φ gehörige Matrix $A = 1 \in M_{1\times 1}(K)$. Es gilt:

$$\varphi(x)A = x1x = T_x A T_x$$

Daraus folgt nach Definition 2.1 (2.3), dass φ streng multiplikativ ist.

k → k + 1: Nach Voraussetzung ist φ streng multiplikativ. Sei nun

$$\psi = \varphi \otimes \langle 1, a \rangle = \varphi \oplus a\varphi,$$

wobei $n = 2^k = \dim(\varphi)$. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ eine zu φ gehörende Diagonalmatrix, also $\varphi = x^t Ax$. Betrachte nun dazu die Diagonalmatrix B von ψ:

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & aA \end{pmatrix} \in M_{2n\times 2n}(K).$$

Seien nun x, y zwei linear unabhängige Vektoren aus n Unbestimmten. Für den generischen Wert $\psi(x, y)$ von ψ gilt:

$$\psi(x, y) = (x, y)B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^t Ax + ay^t Ay = \varphi(x) + a\varphi(y).$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Matrix $T_x \in M_{n\times n}(K)$ für die $\varphi(x)A = T_x^t AT_x$. Ich suche nun eine Matrix, die dasselbe für ψ bzw. B leistet. Dazu betrachte ich die Matrix

$$T_{x,y} := \begin{pmatrix} T_x & aT_y \\ -T_y & U \end{pmatrix}, \text{ mit } U = \varphi(y)^{-1}\varphi(x)T_y T_y^{-1} T_y.$$

Nun muß ich nachrechnen, ob $\psi(x)B = T_{x,y}^t BT_{x,y}$ gilt. Es gilt:

$$B\,T_{x,y} = \begin{pmatrix} AT_x & aAT_y \\ -aAT_y & aAU \end{pmatrix}$$

und

$$T_{x,y}^t\,B\,T_{x,y} = \begin{pmatrix} T_x^t AT_x - T_y^t(-aAT_y) & T_x^t(aAT_y) - T_y^t(aAU) \\ aT_y^t AT_x + U^t(-aAT_y) & aT_y^t(aAT_y) + U^t(aAU) \end{pmatrix}$$

Für die vier Einträge der Matrix gilt folgendes:

$$\begin{aligned}
\text{1. Eintrag} &= \varphi(x)A + a\varphi(y)A, \\
&\quad \text{da } \varphi \text{ streng multiplikativ ist.} \\
&= (\varphi(x) + a\varphi(y))A = \psi(x,y)A \\
\text{2. Eintrag} &= aT_x^tAT_y - a\varphi(x)\varphi(y)^{-1}(T_y^tAT_y)T_x^{-1}T_y, \\
&\quad \text{duch Ersetzen von } U. \\
&= aT_x^tAT_y - a(\varphi(x)A)T_x^{-1}T_y \\
&= aT_x^tAT_y - a(T_x^tAT_x)T_x^{-1}T_y = 0 \\
\text{3. Eintrag} &= (\text{2. Eintrag})^t \ = 0 \\
\text{4. Eintrag} &= a^2\varphi(y)A + a\varphi(y)^{-2}\varphi(x)^2T_y^t(T_x^t)^{-1}(T_y^tAT_y)T_x^{-1}T_y \\
&= a^2\varphi(y)A + a\varphi(y)^{-1}\varphi(x)^2T_y^t((T_x^t)^{-1}AT_y^{-1})T_y \\
&= a^2\varphi(y)A + a\varphi(y)^{-1}\varphi(x)T_y^tAT_y \\
&= a^2\varphi(y)A + a\varphi(x)A \\
&= (\varphi(x) + a\varphi(y))aA = \psi(x,y)aA.
\end{aligned}$$

Damit erhalte ich:

$$T_{x,y}^tBT_{x,y} = \begin{pmatrix} \psi(x,y)A & 0 \\ 0 & \psi(x,y)aA \end{pmatrix} = \psi(x,y)\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & aA \end{pmatrix} = \psi(x,y)B.$$

Die Matrix $T_{x,y}$ erfüllt also die Gleichung $\psi(x,y)B = T_{x,y}^tBT_{x,y}$. Also ist auch ψ nach Defintion 2.1 (2.3) streng multiplikativ. □

Im Pfister findet man zu diesem Satz noch einen wesentlich eleganteren und kürzeren Beweis von Witt. Aber der von mir hier verwendete lange Beweis hat insofern einen Vorteil, als dass sich aus ihm direkte Konsequenzen für das Aussehen von T_x und z aus Definition 2.1 (2.1) und (2.3) ergeben.

Korollar 3.3. *(Pfister, Seite 27, Korollar 2.3)*
Sei φ eine streng multiplikative Form. Dann ist die erste Zeile von T_x gleich dem Zeilenvektor x^tA. Ich finde also ein $z \in (K(x,y))^n$ so, dass gilt $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(z)$ und

$$z_1 = x^tAy = b_\varphi(x,y),$$

wobei z_1 die erste Komponente von z ist.

Beweis. durch Induktion nach k:

k = 0: Für $k = 0$ ist $T_x = x \in M_{1\times1}(K)$ und $A = 1 \in M_{1\times1}(K)$, und es gilt

$$T_x = x = x1 = x^tA.$$

k → k + 1: Nach Induktionsvoraussetzung ist die erste Zeile von T_x gleich dem Zeilenvektor x^tA und die erste Zeile von T_y ist analog dazu der Zeilenvektor y^tA. Wenn ich die Matrix $T_{x,y} = \left(\begin{smallmatrix} T_x & aT_y \\ -T_y & U \end{smallmatrix}\right)$ aus dem Beweis von Satz 3.2 betrachte, sehe ich sofort, dass die erste Zeile von $T_{x,y}$ gleich dem Zeilenvektor $(x^tA, ay^tA) = (x,y)B$ sein muß.

Nach Definition 2.1 (2.3) ist $z = T_x y$. Aus dem bereits bewiesenen folgt nun die zweite Behauptung:

$$T_x = \begin{pmatrix} x^t A \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad z = \begin{pmatrix} x^t A \\ \vdots \end{pmatrix} y \quad \Longrightarrow \quad z_1 = x^t A y = b_\varphi(x, y).$$

□

Ich komme nun noch kurz zu einer Folgerung aus diesem Korollar für den Spezialfall $a_1 = \cdots = a_k = 1$, die noch in einem der späteren Vorträge benötigt wird.

Folgerung 3.4. *(Pfister, Seite 28, Korollar 2.4)*
Sei $n = 2^k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Da $\varphi := n \times \langle 1 \rangle$ eine Pfisterform ist, ist φ nach Satz 3.2 streng multiplikativ. Es gibt also ein $z \in (K(x, y))^n$ mit

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}(x) y_j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

wobei hier die $t_{ij} \in K(x)$ die Matrixeinträge von T_x sind. Nach der Definition der multiplikativen Formen, und da gilt $(n \times \langle 1 \rangle)(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, folgt:

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots y_n^2) = (z_1^2 + \cdots + z_n^2)$$

Weiterhin kann ich nun nach Korollar 3.3 $t_{1j}(x)$ und z_1 so wählen, dass gilt:

$$(\textit{1. Zeile von } T_x) = x^t E_n = (x_1, \ldots, x_n), \ \textit{also } t_{1,j}(x) = x_j$$

und

$$z_1 = b_\varphi(x, y) = x^t E_n y = x_1 y_1 + \ldots x_n y_n.$$

Nun sind alle Voraussetzungen gegeben, um eine kurze Klassifizierung der multiplikativen Formen zu versuchen. Der Platz und die Zeit reicht hier leider nur für zwei Sätze, wobei sich der erste nur mit den anisotropen multiplikativen Formen beschäftigt und der zweite nur mit isotropen multiplitkativen Formen. Auch hier sind die Pfisterformen wieder extrem wichtig. Es sind nämlich nicht nur die Pfisterformen streng multiplikativ wie schon in Satz 3.2 bewiesen, sondern im anisotropen Fall sind auch die multiplikativen Formen Pfisterformen und somit streng multiplikativ.

Satz 3.5. *(Pfister, Seite 29, Theorem 2.3 (1))*
Sei φ eine anisotrope, multiplikative, quadratische Form. Dann ist φ eine Pfisterform und somit streng multiplikativ.

Beweis. Die quadratische Form φ sei anisotrop und multiplikativ. Nach Definition 2.1 wird also $\varphi(x)\varphi(y)$ von φ über $K(x, y)$ repräsentiert. Da φ anisotrop über K ist gilt dies auch über $K(x)$ nach Lemma 1.3. Außerdem repräsentiert φ den generischen Wert $\varphi(x)\varphi(y)$ von $\varphi(x)\varphi$ über $K(x)$. Also kann ich nun Satz 1.2 ((3) $\Rightarrow$ (1)) anwenden und es gilt:

$$\varphi \text{ enthält } \varphi(x)\varphi \text{ über } K(x).$$

Da aber sowohl φ als auch $\varphi(x)\varphi$ dieselbe Dimension haben, folgt:

$$\varphi \cong \varphi(x)\varphi \text{ über } K(x).$$

Dies entspricht aber gerade der Definition 2.1 (2.2). Also ist φ streng multiplikativ und ich muß nur noch zeigen, dass φ auch eine Pfisterform ist.
Sei nun $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ so maximal gewählt, dass gilt:

$$\varphi \text{ enthält } \psi \cong \langle\langle a_1, \dots, a_k \rangle\rangle \text{ über } K.$$

Annahme: $\varphi \cong \psi \oplus \chi$ wobei $\dim(\chi) \geq 1$. Sei zum Beispiel $\chi \cong \langle b, \dots \rangle$ und z ein Vektor der Länge 2^k aus Unbestimmten mit $z = (z_1, \dots, z_{2^k})^t$. Durch einsetzen von $(z_1, \dots, z_{2^k}, 0, \dots)$ in $\psi \oplus \chi$ zeigt sich dann, dass $\psi(z)$ von φ repräsentiert wird. Da φ multiplikativ ist, ist $D^*_{K(z)}$ eine multiplikative Gruppe nach Lemma 2.3. Also wird nicht nur $\psi(z)$ über $K(z)$ repräsentiert, sondern auch $\psi(z)\varphi(x)\ \forall\, x \in (K^*)^{\dim(\varphi)}$. Es gilt also über $K(z)$:

$$\psi \oplus \chi \cong \varphi \cong \psi(z)\varphi \cong \psi(z)\psi \oplus \psi(z)\chi \cong \psi \oplus \psi(z)\chi,$$

da ψ Pfisterform ist und somit streng multiplikativ. Nun kann ich aber den Wittschen Kürzungssatz anwenden:

$$\chi \cong \psi(z)\chi \text{ über } K(z).$$

Insbesondere gilt deshalb und nach Konstruktion von χ:

$$\chi \text{ repräsentiert } b\psi(z) \text{ über } K(z), \text{ da } \chi(1, 0, \dots) = b.$$

φ ist nach Voraussetzung anisotrop und somit auch χ. Außerdem repräsentiert χ den generischen Wert $b\psi(z)$ von $b\psi$. Nun kann ich also wieder Satz 1.2 ((3) $\Rightarrow$ (1)) anwenden:

$$\chi \text{ enthält } b\psi.$$

Da aber nach Annahme $\varphi \cong \psi \oplus \chi$ gilt, folgt:

$$\varphi \text{ enthält } \psi \oplus b\psi \cong \psi \otimes \langle 1, b \rangle \text{ über } K.$$

Daraus folgt aber direkt ein Widerspruch zur Maximalität von k. Es ist also $\chi = 0$ und also $\varphi \cong \psi$, und somit ist φ nach Konstruktion von χ Pisterform. $\square$

Nun beschäftige ich mich mit den isotropen multiplikativen Formen. Auch im isotropen Fall lassen sich die multiplikativen Formen sehr gut klassifizieren, da nämlich jede isotrope quadratische Form multiplikativ ist. Ist eine isotrope quadratische Form auch noch hyperbolisch, so ist sie sogar streng multiplikativ.

Definition 3.6. *φ sei eine quadratische Form über einem Körper K. Es ist φ hyberbolisch, wenn $\varphi \sim 0$ im Wittring $W(K)$. Für die Gestalt von φ gilt also:*

$$\varphi \cong i \times \langle 1, -1 \rangle \textit{ mit einem passenden } i \in \mathbb{N}.$$

Satz 3.7. *(Pfister, Seite 29, Theorem 2.3 (2))*
Sei φ eine isotrope quadratische Form über K. Dann ist φ multiplikativ. φ ist streng multiplikativ genau dann, wenn φ hyberbolisch ist.

Beweis. φ sei eine isotrope quadratische Form über K. Also ist φ universell über K. Da φ auch über jedem Erweiterungskörper $L \supseteq K$ isotrop bleibt, ist φ auch über jedem Erweiterungskörper L von K universell. Sei nun $L = K(x, y)$, mit zwei Vektoren x, y der Länge n aus Unbestimmten. Da $\varphi(x)\varphi(y) \in K(x, y)$, und da φ universell über $K(x, y)$ ist, folgt:

$$\varphi \text{ repräsentiert } \varphi(x)\varphi(y) \text{ über } K(x, y).$$

Nach Definition 2.1 ist φ also multiplikativ, womit die erste Behauptung bewiesen wäre.

Nun zeige ich noch die Äquivalenz von „hyperbolisch" und „streng multiplikativ" bei isotropen multiplikativen Formen.

„ $\Longrightarrow$ ": Sei nun φ zusätzlich hyperbolisch. Es gibt also ein $i \in \mathbb{N}$ so, dass gilt:

$$\varphi \cong i \times \langle 1, -1 \rangle$$

Da $\langle 1, -1 \rangle$ über $K(x)$ bis auf Äquivalenz die einzige isotrope quadratische Form mit $\dim(\varphi) = 2$ ist, und da $langle 1, -1\rangle$ universell über $K(x)$ ist, gilt $\langle 1, -1 \rangle \cong f(x)\langle 1, -1 \rangle \; \forall f \in K(x)$. Für φ folgt also:

$$\varphi \cong \varphi(x)\varphi \text{ über } K(x)$$

Dies ist aber gerade die Definition 2.1 (2.2) für strenge Multiplikativität. φ ist also streng multiplikativ.

„ $\Longleftarrow$ ": Sei nun φ isotrop und streng multiplikativ über K. Nach dem Wittschen Kürzungssatz finde ich eine Darstellung

$$\varphi \cong i \times \langle 1, -1 \rangle \oplus \varphi_0,$$

mit einem passenden $i \in \mathbb{N}$ und einem anisotropen Anteil φ_0. Da φ nach Voraussetzung streng multiplikativ ist, gilt weiter:

$$i \times \langle 1, -1 \rangle \oplus \varphi_0 \cong \varphi \cong \varphi(x)\varphi \cong i \times \varphi(x)\langle 1, -1 \rangle \oplus \varphi(x)\varphi_0.$$

Nach dem Wittsche Kürzungssatz erhalte ich nun durch i-maliges Kürzen von $\langle 1, -1 \rangle \cong \varphi(x)\langle 1, -1 \rangle$:

$$\varphi_0 \cong \varphi(x)\varphi_0.$$

Nun muß ich also nur noch zeigen, dass $\varphi_0 = 0$ ist.

Annahme: $\varphi \not\sim 0$, also $\varphi_0 \neq 0$. Es soll also für die Dimension von φ_0 gelten, dass $\dim(\varphi_0) \geq 1$ ist. Sei nun zum Beispiel $\varphi_0 \cong \langle b, \dots \rangle$. Da wie schon gezeigt $\varphi_0 \cong \varphi(x)\varphi_0$ ist, erhalte ich durch Einsetzen von $(1, 0, \dots)$ in φ_0:

$$\varphi_0 \text{ repräsentiert } b\varphi(x) \text{ über } K(x).$$

φ_0 ist nach Konstruktion anisotrop. Außerdem repräsentiert φ_0 den generischen Wert $b\varphi(x)$ von $b\varphi$. Ich kann also wieder Satz 1.2 ((3) $\Rightarrow$ (1)) anwenden und es folgt:

$$\varphi_0 \text{ enthält } b\varphi.$$

Da aber nach Konstruktion $\dim(\varphi) > \dim(\varphi_0)$ gilt, folgt hieraus sofort ein Widerspruch. Es muß also $\varphi_0 = 0$ sein und somit φ hyperbolisch, womit nun auch beide Richtungen der zweiten Behauptung bewiesen wären. □

Ich hoffe, dass ich einen groben Eindruck davon vermitteln konnte, was multiplikative Formen sind. Auf jedenfall ist aber nun für streng multiplikative Formen klar, welche konkrete Form sie jeweils im anisotropen und im isotropen Fall haben. Speziell Pfisterformen werden noch im späteren Verlauf dieses Seminars in einigen Beweisen gebraucht, wobei vor allem von Nutzen ist, dass Pfisterformen immer eine 2-er Potenz als Dimension haben.

Als nächstes stelle ich die multiplikativen Formen vorerst zurück und wende mich nun den runden Form zu.

4 Runde Formen

Schon an der Definition der runden Formen sieht man bereits, dass sie wesentlich einfacher zu handhaben sind als multiplikative Formen.

Definition 4.1. *(Lorenz, Seite 22, Definition 2.1)*
Sei φ eine quadratische Form über K. φ heißt rund, falls im Wittring $W(K)$ gilt:

$$c\varphi \sim \varphi \quad \forall\, c \in D_K(\varphi).$$

Eine quadratische Form φ ist also rund, wenn alle von φ dargestellten Element auch Ähnlichkeitsfaktoren von φ sind. Mit dem folgenden Satz zeige ich, dass die auch Umkehrung gilt. Diesen Satz und den zughörigen Beweis habe ich nicht während des Vortrags angeschrieben. Ich habe ihn vielmehr später noch ergänzt, da ich die Gleichheit von $D_K(\varphi)$ und $G_K(\varphi)$ zwar bereits im Vortrag ohne Beweis verwendet hatte, mir die Aussage jedoch nicht trivial genug erschien, um sie unbewiesen zu lassen.

Satz 4.2. *Sei φ eine quadratische Form über K. φ ist genau dann rund, wenn $D_K(\varphi) = G_K(\varphi)$ gilt.*

Beweis. **„ $\Longrightarrow$ “:** Sei φ rund. Nach Definition gilt bereits $D_K(\varphi) \subset G_K(\varphi)$. Ich muß also nur noch zeigen, dass $G_K(\varphi) \subset D_K(\varphi)$ ist.

1. Fall: φ ist anisotrop.
Annahme: Es gibt ein $b \in G_K(\varphi)$, mit $b \notin D_K(\varphi)$.
Es ist also $b \neq 0$, da φ anisotrop ist, und es gilt für alle $x \in K^*$, dass $\varphi(x) \neq b$. Da $0 \notin D_K(\varphi)$ ist, folgt:

$$\exists\, x \in K^*, \text{ mit } \varphi(x)\varphi(y) \neq b\varphi(y) \quad \forall\, y \in K^*.$$

Daraus folgt, dass $\varphi(x)\varphi$ nicht kongruent zu $b\varphi$ ist. Und nach Definition 4.1 einer runden Form folgt $\varphi(x) \in D_K(\varphi) \subset G_K(\varphi)$, und somit:

$$\varphi \cong \varphi(x)\varphi \ncong b\varphi \cong \varphi,$$

da $b \in G_K(\varphi)$. Hier sieht man sofort den Widerspruch. Es muß also gelten $b \in D_K(\varphi)$, woraus $G_K(\varphi) \subset D_K(\varphi)$ folgt. Zusammen mit Definition 4.1 folgt $G_K(\varphi) = D_K(\varphi)$.

2. Fall: φ ist isotrop.
In diesem Fall ist φ universell und es gilt somit $D_K(\varphi) = K$. Aus der Definition der runden Formen folgt

$$K = D_K(\varphi) \subset G_K(\varphi) \subset K.$$

Es folgt also, dass $G_K(\varphi) = K = D_K(\varphi)$.

„ $\Longleftarrow$ “: Sei φ eine quadratische Form über K mit $D_K(\varphi) = G_K(\varphi)$. Dann folgt direkt aus Definition 4.1, dass φ rund ist. □

Runde Formen sind den multipliktiven Formen sehr ähnlich. Zunächst werde ich zwei Sätze anbringen, mit deren Hilfe diese Ähnlichkeit sehr deutlich wird. Im letzten Abschnitt werde ich mich dann ausschließlich dem konkreten Zusammenhang zwischen multiplikativen und runden Formen widmen. Aber zunächst ziehe ich eine Parallele zu Lemma 2.3 für multiplikative Formen.

Satz 4.3. *(Lorenz, Seite 22, Satz 2.2)*
φ sei eine quadratische Form über K. Ist φ rund, so gilt:

$$D_K^*(\varphi) \textit{ ist eine Untergruppe von } K^*.$$

Beweis. Sei $n = \dim(\varphi)$.

1) Seien $a, b \in D_K^*(\varphi)$, $b = \varphi(w)$, mit einem passenden $w \in K^n$. Da φ rund und $a \in D_K^*(\varphi)$ ist, gilt $\varphi \cong a\varphi$. Deshalb kann ich eine Matrix $T \in GL_n(K)$ finden so, dass gilt:

$$ab = a\varphi(w) = (a\varphi)(w) = \varphi(Tw).$$

Also wird ab von φ repräsentiert und es gilt $ab \in D_K^*(\varphi)$.

2) Sei nun $a \in D_K^*(\varphi)$ beliebig. Es gibt also ein $w \in K^n$ mit $a = \varphi(w)$ und es gilt:

$$\varphi(\frac{w}{a}) = \frac{1}{a^2}\varphi(w) = \frac{a}{a^2} = \frac{1}{a}.$$

Es wird also auch das Inverse a^{-1} von a repräsentiert und es gilt $a^{-1} \in D_K^*(\varphi)$.

3) Sei $a \in D_K^*(\varphi)$. Nach 2) ist nun auch $a^{-1} \in D_K^*(\varphi)$. Es gilt also:

$$aa^{-1} = 1 \in D_K^*(\varphi).$$

Nach 1), 2) und 3) erfüllt $D_K^*(\varphi)$ die drei Gruppenaxiome, ist also eine Untergruppe von K^*. □

Genau wie bei den multiplikativen Formen, bildet hier die Menge der repräsentierten Elemente eine Untergruppe von K^*. Diese Ähnlichkeit gilt auch bezüglich der Pfisterformen, wie der folgende Satz deutlich macht, der dem Satz 3.2 aus dem Abschnitt über Pfisterformen sehr gleicht.

Satz 4.4. *(Lorenz, Seite 22, Satz 2.3)*
φ sei eine quadratische Form über K. Es gilt:

$$\varphi \textit{ ist rund.} \quad \Longrightarrow \quad \varphi \otimes \langle 1, a\rangle \textit{ ist rund} \quad \forall\, a \in K^*.$$

Füge ich dem Beweis zu dieser Aussage noch einen Induktionsanfang hinzu, so folgt, dass alle Pfisterformen rund sind.

Beweis. Sei $r \in D_K^*(\varphi \times \langle 1, a\rangle) = D_K^*(\varphi \oplus a\varphi)$. Mit geeigneten $b, c \in D_K^*(\varphi) \cup \{0\}$ kann ich r darstellen als $r = b + ac$, da ac von $a\varphi$ repräsentiert wird. Ich muß nun zeigen, dass $b + ac$ ein Ähnlichkeitsfaktor von $\varphi \oplus a\varphi$ ist.

1. Fall: $b = 0$ oder $c = 0$
Sei zunächst $c = 0$. Da φ rund ist, folgt

$$r(\varphi \oplus a\varphi) = b\varphi \oplus ba\varphi \sim \varphi \oplus a\varphi.$$

Ist $b = 0$, so gilt:

$$r(\varphi \oplus a\varphi) = ac\varphi \oplus a^2c\varphi \sim a\varphi \oplus \varphi) \cong \varphi \oplus a\varphi,$$

da c und a^2 aus $D_K^*(\varphi)$ sind, und da φ rund ist.

2. Fall: $b \neq 0$ und $c \neq 0$
Es gilt:

$$\begin{aligned}
(b+ac)(\varphi \oplus a\varphi) \quad &\sim \quad (b+ac)(\varphi \oplus abc\varphi), \\
&\qquad \text{da } \varphi \text{ rund ist und da } b, c \in D_K^*(\varphi), \\
&\qquad \text{wobei } D_K^*(\varphi) \text{ eine Gruppe ist.} \\
&\cong \quad (b+ac)((1 \oplus abc)\otimes) \\
&\cong \quad ((b+ac) \oplus (b+ac)) \otimes \varphi \\
&\cong \quad \langle b, ac\rangle \otimes \varphi, \\
&\qquad \text{da } (b+ac) \text{ repräsentiert wird, und somit Lemma 1.5} \\
&\qquad \text{anwendbar ist, mit } c = (b+ac) \text{ und } ab = abc. \\
&\cong \quad (b\varphi \oplus ac\varphi) \\
&\cong \quad \varphi \oplus a\varphi, \\
&\qquad \text{da } \varphi \text{ rund ist und } b, c \in D_K^*(\varphi) \text{ sind.}
\end{aligned}$$

$\varphi \oplus a\varphi$ ist also rund. Und da $\langle 1\rangle$ offensichtlich rund ist, folgt, dass alle Pfisterformen rund sind. □

Ich möchte noch kurz etwas zu isotropen runden Formen anbringen, da man auch hier eine sehr schöne Parallele zu den multiplikativen Formen sehen kann, und nebenbei wird es mir im nächsten Abschnitt einige Beweise arg erleichtern.

Satz 4.5. *φ sei eine isotrope quadratische Form über K.*

$$\varphi \textit{ ist rund.} \iff \varphi \textit{ ist hyperbolisch.}$$

Beweis. **„ $\Longrightarrow$ “:** φ sei eine isotrope runde Form. Es ist gilt also $0 \in D_K(\varphi)$. Nach Definition 4.1 gilt:

$$\varphi \sim 0\varphi \sim 0 \text{ in } W(K).$$

Und nach Definition 3.6 folgt:

$$\varphi \cong i \times \langle 1, -1\rangle.$$

Also ist φ hyberbolisch.

„ $\Longleftarrow$ “: φ sei eine hyperbolische quadratische Form über K. Da φ nach Definition 3.6 isotrop ist, gilt $D_K(\varphi) = K$. Weiterhin folgt $\varphi \sim 0$, da φ hyperbolisch ist. Also:

$$k\varphi \sim 0 \sim \varphi \quad \forall k \in K.$$

Also ist K in $G_K(\varphi)$ enthalten. Und da $D_K(\varphi)$ ohnehin nur Elemente aus K enthalten kann, folgt $G_K(\varphi) = K = D_K(\varphi)$ und also nach Definition 4.1, dass φ rund ist. □

5 Zusammenhänge zwischen runden und multiplikativen Formen

Da multiplikative und runde Formen teilweise so ähnliche Eigenschaften haben, sind folgende Sätze fast nur noch einfache Folgerungen. Wieder wende ich mich zuerst den anisotropen quadratischen Formen zu.

Satz 5.1. *(Lorenz, Seite 25, Satz 2.8)*
φ sei eine multiplikative Form über K. Ist φ anisotrop, so ist φ rund.

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} & \varphi \text{ ist anisotrop und multiplikativ.} \\ \Longleftrightarrow\ & \varphi \text{ ist eine anisotrope Pfisterform, nach Satz 3.5.} \\ \Longrightarrow\ & \varphi \text{ ist anisotrop und rund, nach Satz 4.4.} \end{aligned}$$

□

Bei den isotropen runden Formen ist die Beziehung noch stärker. Diese sind nämlich gerade die isotropen streng multiplikativen Formen.

Satz 5.2. *Sei φ eine isotrope quadratische Form über K. φ ist genau dann rund, wenn φ streng multiplikativ ist.*

Beweis. Sei φ eine isotrope quadratische Form.

$$\begin{aligned} & \varphi \text{ ist rund.} \\ \Longleftrightarrow\ & \varphi \text{ ist hyperbolisch, nach Satz 4.5.} \\ \Longleftrightarrow\ & \varphi \text{ ist streng multiplikativ, nach Satz 3.7.} \end{aligned}$$

□

Jetzt weiß ich genug über multiplikative und runde Formen, um das Diagramm in Abbildung 1 aufzustellen.

Im isotropen Fall sind also alle quadratischen Formen multiplikativ (Satz 3.7). Das hilft aber nicht viel weiter, wenn versucht werden soll, die quadratischen Formen für einen Körper K zu klassifizieren. Dafür fallen im isotropen Fall die streng multiplikativen und die runden Formen zusammen (Satz 5.2). Hier machen die Pfisterformen nur einen kleinen Teil der streng multiplikativen Formen aus.

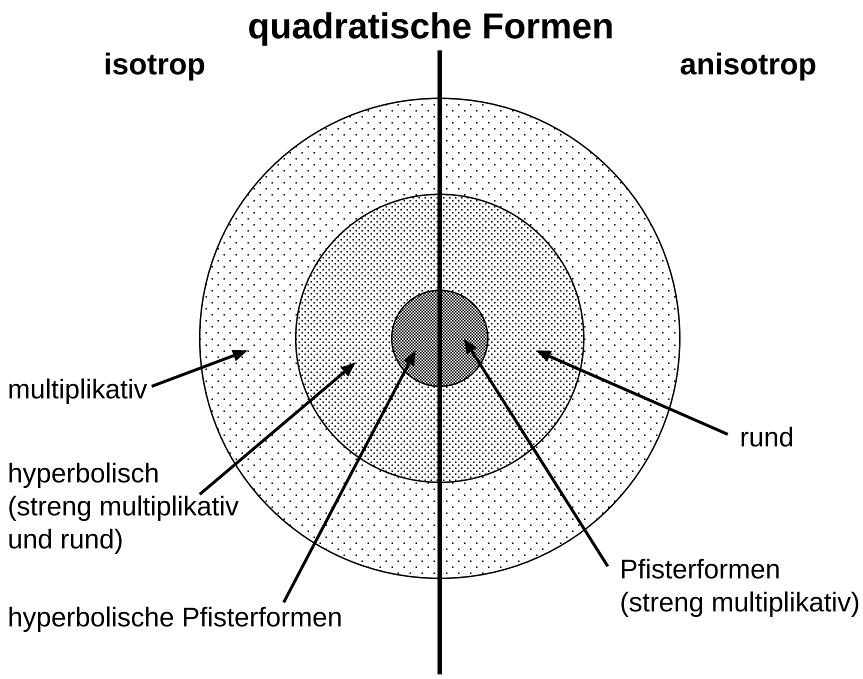

Abbildung 1: Klassifikation der multiplikativen und runden Formen

Im anisotropen Fall machen die multiplikativen Formen in Abbildung 1 den kleinsten Teil aus, wobei hier alle multiplikativen Formen streng multiplikativ und Pfisterformen (Satz 3.5) sind. Die runden Formen enthalten die Pfisterformen und es stellt sich nun die Frage, ob auch im anisotropen Fall die runden und die streng multiplikativen Formen zusammenfallen. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall. Und um das zu einzusehen, brauche ich folgende Überlegungen.

Von nun an betrachte ich nur noch anisotrope quadratische Formen.

Satz 5.3. *φ sei eine anisotrope quadratische Form über K und die Dimension $n = \dim(\varphi)$ von φ sei ungerade. Dann sind die Quadrate aus K^* gleich den Ähnlichkeitsfaktoren von φ. Es gilt also:*

$$G_K(\varphi) \quad = \quad (K^*)^2.$$

Beweis. Sei $a \in G_K(\varphi)$, $a \neq 0$ beliebig. Nach Definition 2.2 gilt:

$$a\varphi \quad \cong \quad \varphi.$$

Da aber nun zwei Äquivalente quadratische Formen in K^*/K^{*2} dieselbe Determinante haben, und nach Definition 1.4, folgt:

$$\begin{aligned} & \det(\varphi) = \det(a\varphi) \text{ in } K^*/K^{*2} \\ \Longrightarrow \quad & \det(\varphi) = a^n \det(\varphi) \text{ in } K^*/K^{*2}. \end{aligned}$$

Nach Definition von K^*/K^{*2} muß es also ein passendes $b \in K^*$ geben so, dass gilt:

$$a^n \quad = \quad b^2.$$

Nach Voraussetzung ist $n = \dim(\varphi)$ ungerade. Es gibt also ein $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit

$$n = 2m+1 \implies a^{2m+1} = b^2 \implies a = \frac{b^2}{a^{2n}} = \left(\frac{b}{a^m}\right)^2.$$

$a \neq 0$ läßt sich also als Quadrat darstellen und es gilt somit $a \in (K^*)^2$.

$$\implies \quad (K^*)^2 \supset G_K(\varphi).$$

Da aber ohnehin alle Quadrate aus K^* Ähnlichkeitesfaktoren sind, folgt:

$$(K^*)^2 = G_K(\varphi).$$

□

Da φ rund ist, folgt nach Definition 4.1, dass $D_K(\varphi) = G_K(\varphi)$. Deshalb erhalten vor aus dem vorherigen Satz die folgende Folgerung.

Folgerung 5.4. *Sei φ eine anisotrope quadratische Form über K, wobei $n = \dim(\varphi)$ ungerade sei. Dann gilt folgende Äquivalenz:*

$$\varphi \textit{ ist rund.} \iff D_K(\varphi) = (K^*)^2.$$

Unserem Ziel noch ein Stückchen näher bring uns folgender Satz.

Satz 5.5. *Sei φ eine quadratische Form über K mit $n = \dim(\varphi)$. Dann gilt*

$$D_K(\varphi) = (K^*)^2 \implies \varphi \cong \dim(\varphi) \times \langle 1 \rangle.$$

Beweis. Da φ nach Voraussetzung alle Quadrate repräsentiert, muß gelten

$$\varphi \cong \langle 1 \rangle \oplus \varphi', \text{ mit } D_K(\varphi') \subseteq D_K(\varphi) = (K^*)^2.$$

Annahme: $1 \notin D_K(\varphi')$
Daraus folgt $\forall\, x' \in K^{n-1}$, dass $\varphi'(x') \neq 1$ ist. Sei aber $b^2 \in D_K(\varphi') \subset (K^*)^2$ und $y' \in K^{n-1}$, mit $\varphi(y') = b^2$. Aus der Annahme folgt dann $\forall\, x' \in K^{n-1}$:

$$\varphi'(y')\varphi'(x') \neq 1\varphi'(y') \implies b^2\varphi'(x') \neq b^2 \implies \varphi'(bx') \neq b^2$$

Aber aus $\varphi'(b\frac{y'}{b}) = \varphi'(y') = b^2$ folgt hier ein Widerspruch. 1 muß also Element aus $D_K(\varphi')$ sein. Sei nun $c^2 \in (K^*)^2$ beliebig und $d' \in K^{n-1}$, mit $\varphi'(d') = 0$. Es folgt dann:

$$c^2 = c^2 1 = c^2\varphi'(d') = \varphi'(cd'), \text{ wobei } cd' \in K^{n-1}.$$

Da also φ jedes Quadrat aus K^* repräsentiert, folgt:

$$D_K(\varphi') \quad = \quad (K^*)^2.$$

Daraus folgt, dass $\varphi' \cong \langle 1 \rangle \oplus \varphi''$. Und durch einfache Induktion folgt die Behauptung. □

Die Umkehrung des eben bewiesenen Satzes gilt im Allgemeinen nicht. Betrachte zum Beispiel in $\mathbb{Q}$ die quadratische Form $\varphi = \langle 1, 1, 1 \rangle$. Es gilt:

$$\varphi(2) = 2^2 + 2^2 + 2^2 = 12 \notin (\mathbb{Q}^*)^2.$$

Als Folgerung aus den Sätzen 4.2 und 5.5 und aus Folgerung 5.4 erhalte ich:

Folgerung 5.6. *Sei φ eine ungerade-dimensionale quadratische Form über K. Ist φ rund, so gilt $\varphi \cong \dim(\varphi) \times \langle 1 \rangle$.*

Nun muß ich wissen, für welche Körper K es ungerade-dimensionale runde Form φ mit $n = \dim(\varphi) > 1$ gibt. Die folgenden Definitionen werden bei der Beatwortung dieser Frage helfen.

Definition 5.7. *Sei K ein Körper.*

(1) Es gilt

$$(K^*)^2 = D_K(\langle 1 \rangle) \subseteq D_K(2 \times \langle 1 \rangle) \subseteq \ldots \subseteq D_K(n \times \langle 1 \rangle) \subseteq \ldots .$$

Sei $\sum K$ definiert als

$$\sum K \quad = \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_K(n \times \langle 1 \rangle).$$

(2) Ein Körper K heißt formal reell, wenn in ihm -1 nicht als Summe vn Quadraten darstellbar ist.

(3) Ein Körper K heißt pythagoräisch, wenn jede Summe von Quadraten wieder ein Quadrat ist.

Gibt es also ein ungerades $n > 1$ so, dass $n \times \langle 1 \rangle$ rund ist, so gilt $D_K(n \times \langle 1 \rangle) = (K^*)^2$ nach Folgerung 5.6. Und nach Definition 5.7 (1) folgt weiter

$$(K^*)^2 = D_K(\langle 1 \rangle) = \cdots = D_K(n \times \langle 1 \rangle). \tag{5.1}$$

Sei $b_1 = (n \times \langle 1 \rangle)(a_1, \ldots, a_n)$. Es folgt aus (5.1), dass $b_1 \in (K^*)^2$. Deshalb gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$D_K((n+m) \times \langle 1 \rangle) \subseteq D_K((1+m) \times \langle 1 \rangle),$$

da

$$\begin{aligned} \varphi(a_1, \ldots, a_n, \ldots, a_{n+m}) &= (a_1^2 + \cdots + a_n^2) + a_{n+1}^2 + \cdots + a_{n+m}^2 \\ &= b_1^2 + a_{n+1}^2 + \cdots + a_{n+m}^2. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Und durch Induktion erhalte ich

$$(K^*)^2 = D_K(r \times \langle 1 \rangle) \quad \forall r \in \mathbb{N}, \text{ also } \sum K = (K^*)^2.$$

Daran kann ich folgende Bedingungen für K sehen:

1) Angenommen es gibt ein ungerades $n > 1$ so dass $n \times \langle 1 \rangle$ rund ist. Da für jede quadratische Form φ gilt $(K^*)^2 \subset G_K(\varphi)$, und da $0 \notin (K^*)^2 = D_K(\varphi)$, müssen in K alle quadratischen Formen φ der Gestalt $\varphi \cong r \times \langle 1 \rangle$ rund und anisotrop sein.

2) Aus dem ersten Punkt und aus (5.2) folgt für K:

   - Jede Summe von Quadraten ist wieder ein Quadrat in K. Also muß K nach Definition 5.7 (3) pythagoräisch sein.
   - Jede quadratische Form φ mit $\varphi \cong r \times \langle 1 \rangle$, mit einem $r \in \mathbb{N}$, ist anisotrop. Betrachte nun die quadratische Form φ. Gilt $-1 \in D_K(\varphi)$, so folgt $-1 = \varphi(x)$, mit einem passenden $x \in K^{\dim(\varphi)}$. Und daraus folgt $0 = 1 + \varphi(x) = (\langle 1 \rangle \oplus \varphi)(1, x)$. Also gilt:

   $$\begin{aligned} -1 \in D_K(n \times \langle 1 \rangle) &\iff 0 \in D_K((n+1) \times \langle 1 \rangle) \\ &\iff (n+1) \times \langle 1 \rangle \text{ ist isotrop.} \end{aligned}$$

   Es muß K also nach Definition 5.7 (2) formal reell sein.

Als Resultat der Überlegungen erhalte ich den folgenden Satz.

Satz 5.8. *Gilt $(K^*)^2 = \sum K$, ist K also formal reell und pythagoräisch, so ist jede quadratische Form der Gestalt $\varphi \cong n \times \langle 1 \rangle$, mit einem passenden $n \in \mathbb{N}$ anisotrop und rund.*

Auf die Frage, für welche Körper es echt mehr runde als streng multiplikative Formen gibt, gibt es nun wenigstens eine vorläufige Antwort, da in formal rellen, pythagoräischen Körpern alle quadratischen Formen $\varphi \cong n \times \langle 1 \rangle$ anisotrop und rund, aber nur solche mit $n = 2^k$, für ein $k \in \mathbb{N}$, Pfisterformen und somit streng multiplikativ sind. Es bleibt allerdings noch die Frage offen, ob die formal reellen, pythagoräischen Körper die einzigen sind, in denen dies gilt. Aber an dieser Stelle möchte ich den Vortrag mit einer letzten Folgerung beenden, die die gemachten Überlegungen zu einem Resultat zusammenfasst.

Folgerung 5.9. *Sei der Körper K formal reell und pythagoräisch. Dann gibt es über K echt mehr anisotrope runde Formen als anisotrope streng multiplikative Formen.*